Groupe A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

AVERTISSEMENT

Les candidats sont invités à lire soigneusement la liste des définitions qui précède l'énoncé des questions.

Les parties I, II *et* III *sont indépendantes. On peut aborder l'étude des parties* IV, V *et* VI *sans avoir traité la partie* III.

Les correcteurs tiendront compte du soin apporté à la rédaction.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

1. On appelle *algèbre* un espace vectoriel A sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni d'une application bilinéaire de $A \times A$ dans A, notée $(a, b) \longrightarrow ab$, qui est associative ($(ab)c = a(bc)$). Un *élément unité* de A est un élément e de A tel que l'on ait $ea = ae = a$ pour tout a dans A. Un tel élément unité, s'il existe, est unique. On dit que A est *unifère* si elle possède un élément unité.

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On note $\mathfrak{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans E, et uv le composé de deux éléments u et v de $\mathfrak{L}(E)$: $uv(x) = u(v(x))$. Avec ce produit, $\mathfrak{L}(E)$ est une algèbre unifère dont l'élément unité est l'application identique I_E de E.

3. Soit A une algèbre. Pour tout a dans A, on note $\rho(a)$ l'application linéaire de A dans A définie par $\rho(a)(b) = ab$. Alors ρ est une application linéaire de A dans $\mathfrak{L}(A)$ qui satisfait à $\rho(ab) = \rho(a)\,\rho(b)$ pour a et b dans A. Si A est unifère et si e est l'élément unité de A, on a $\rho(e) = I_A$.

4. Soit A une algèbre. Si X et Y sont deux parties de A, on note XY l'ensemble des produits xy où x parcourt X et y parcourt Y. Si a est un élément de A et X une partie de A, on écrit aX au lieu de $\{a\}X$ et Xa au lieu de $X\{a\}$. Le produit d'un nombre fini quelconque de parties de A est défini de manière analogue.

5. Soit A une algèbre. Un *idéal à gauche* de A est un sous-espace vectoriel I de A tel que $AI \subset I$. De même un *idéal à droite* est un sous-espace vectoriel I de A tel que $IA \subset I$. Un *idéal* de A est une partie de A qui est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite.

Un idéal à gauche I de A est dit *minimal* s'il n'est pas réduit à $\{0\}$ et s'il n'existe aucun idéal à gauche contenu dans I, autre que $\{0\}$ et I. On définit de même un idéal à droite minimal et un idéal minimal.

6. Soit A une algèbre. On dit qu'un élément f de A est *idempotent* si l'on a $f^2 = f$. On dit que l'idempotent f est irréductible s'il n'est pas somme de deux idempotents f_1 et f_2 non nuls tels que $f_1 f_2 = f_2 f_1 = 0$.

7. On note $\mathbb{C}[X]$ l'algèbre unifère formée des polynômes à coefficients complexes en une indéterminée X, avec les opérations usuelles.

Soit A une algèbre unifère, e son élément unité et a un élément de A. Si P est un élément de $\mathbb{C}[X]$, de la forme $P(X) = \sum_{j=0}^{n} c_j X^j$, on note $P(a)$ l'élément $\sum_{j=0}^{n} c_j a^j$ de A (avec la convention $a^0 = e$).

8. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un *produit scalaire* sur E est une application qui associe à tout couple d'éléments x, y de E un nombre complexe $(x|y)$ de façon que l'on ait les identités suivantes, où x, y, z sont des éléments quelconques de E et λ un nombre complexe arbitraire :

$$(1) \qquad (y|x) = \overline{(x|y)}$$

$$(2) \qquad (x+y|z) = (x|z) + (y|z)$$

$$(3) \qquad (\lambda x|y) = \lambda(x|y)$$

$$(4) \qquad (x|x) > 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

9. Soit A une algèbre. On appelle *involution* dans A toute application $a \longrightarrow a^*$ de A dans A qui satisfait aux règles de calcul suivantes (pour a et b arbitraires dans A et λ un nombre complexe quelconque) :

$$(5) \qquad (a^*)^* = a$$

$$(6) \qquad (a+b)^* = a^* + b^*$$

$$(7) \qquad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$$

$$(8) \qquad (ab)^* = b^* a^*$$

Dans ces conditions un élément a de A est dit *hermitien* si l'on a $a^* = a$.

.../...

10. Soit A une algèbre munie d'une involution. On appelle *trace* sur A toute forme linéaire t sur A satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$t(a^*) = \overline{t(a)} \quad \text{et} \quad t(ab) = t(ba)$$

si a et b sont des éléments de A et $t(aa^*) > 0$ pour tout élément a non nul de A.

11. Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ et si x est un élément de E, on note $\mathbb{C}x$ l'ensemble des multiples λx de x où λ parcourt $\mathbb{C}$.

I

Dans toute cette partie on note A une algèbre unifère et e son élément unité. On suppose que A est un espace vectoriel de dimension finie non nulle.

1° Soit a un élément de A; on note $\mathfrak{I}_a$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(a) = 0$. Montrer que $\mathfrak{I}_a$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$, distinct de $\{0\}$ et de $\mathbb{C}[X]$. On rappelle qu'il existe alors un unique polynôme unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1) P_a, de degré $n \geqslant 1$, et tel que $\mathfrak{I}_a$ se compose des multiples de P_a. Le polynôme P_a s'appelle le *polynôme minimal* de a.

2° Montrer que si l'algèbre A est telle que le produit de deux éléments non nuls soit non nul, on a : $A = \mathbb{C}e$.

3° Soit ρ comme dans la définition 3. Montrer que a et $\rho(a)$ ont même polynôme minimal pour tout élément a de A.

Que peut-on dire du polynôme minimal de a lorsque $\rho(a)$ est diagonalisable?

4° Soit a un élément de A dont le polynôme minimal soit de la forme $(X - \lambda)\,Q(X)$ avec λ dans $\mathbb{C}$, Q dans $\mathbb{C}[X]$ et $Q(\lambda) \neq 0$. Montrer que $Q(\lambda)^{-1}\,Q(a)$ est un idempotent non nul de A.

II

1° Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire. On rappelle que pour tout u dans $\mathfrak{L}(E)$ il existe un unique élément u^* de $\mathfrak{L}(E)$ satisfaisant à la relation

$$(u(x)\,|\,y) = (x\,|\,u^*(y)) \quad \text{pour } x \text{ et } y \text{ dans E.} \tag{9}$$

Montrer que l'application $u \longmapsto u^*$ est une involution sur $\mathfrak{L}(E)$.

Soit u un élément de $\mathfrak{L}(E)$, et soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases orthonormales de E. Montrer que l'on a

$$\sum_{i=1}^{n} (u(e_i)\,|\,e_i) = \sum_{i=1}^{n} (u(e'_i)\,|\,e'_i).$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, notons $\mathrm{Tr}(u)$ le nombre complexe

$$\sum_{i=1}^{n} (u(e_i)\,|\,e_i).$$

Montrer que l'application Tr est une trace sur $\mathfrak{L}(E)$ (au sens de la définition 10).

2° Soit A une algèbre munie d'une involution $a \longmapsto a^*$.

Montrer que si A possède un élément unité e, on a $e^* = e$.

Supposons que A soit également munie d'une trace t relativement à cette involution. Pour a et b dans A posons $(a|b) = t(ab^*)$.

Montrer qu'on obtient ainsi un produit scalaire sur A, et établir les propriétés suivantes :

a. Pour tout $a \neq 0$ dans A, il existe un élément b de A tel que $ab \neq 0$.

b. Quels que soient les éléments a, b, c de A, on a :

$$(a^*|b^*) = \overline{(a|b)} \tag{10}$$

$$(ab|c) = (b|a^*c) = (a|cb^*) \tag{11}$$

$$(a|bc) = (b^*a|c) = (ac^*|b). \tag{12}$$

3° Soit A une algèbre satisfaisant à la condition *a.* ci-dessus, munie d'une involution et d'un produit scalaire vérifiant les relations (10), (11) et (12). On suppose que l'espace vectoriel A est de dimension finie. Montrer que A possède un élément unité et qu'il existe une trace t sur A vérifiant $(a|b) = t(ab^*)$, quels que soient a et b dans A. [Avec les notations de la définition 3, décomposer I_A sous la forme $I_A = u + \rho(e)$, avec u dans $\mathfrak{L}(A)$ tel que $\mathrm{Tr}\,(\rho(a)\,u) = 0$ pour tout $a \in A$.]

4° Soit A l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients complexes des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que, pour le produit usuel des matrices, A est une algèbre unifère. Déterminer toutes les involutions de A. Si $a \longrightarrow a^*$ est une involution de A montrer qu'il n'existe aucune trace sur A relative à cette involution.

.../...

III

Soit G un groupe ayant un nombre fini d'éléments. On note A(G) l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes définies sur G avec les opérations vectorielles usuelles définies par

$$(u+v)(g) = u(g) + v(g), \quad (\lambda u)(g) = \lambda u(g)$$

pour u, v dans A(G), λ dans $\mathbb{C}$ et g dans G.

Pour tout g dans G on note ε_g l'élément de A(G) ainsi défini :

$$\varepsilon_g(g) = 1, \quad \varepsilon_g(g') = 0 \quad \text{si } g' \neq g.$$

1° Montrer que la famille des éléments ε_g (pour g parcourant G) est une base de l'espace vectoriel A(G). Montrer que l'on peut de manière unique considérer A(G) comme une algèbre unifère, munie d'une involution $a \longmapsto a^*$ et d'une trace t, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\varepsilon_g \varepsilon_{g'} = \varepsilon_{gg'}, \quad (\varepsilon_g)^* = \varepsilon_{g^{-1}}, \quad t(\varepsilon_g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = \mathrm{I} \\ 0 & \text{si } g \neq \mathrm{I} \end{cases}$$

(on a noté I l'unité du groupe G).

Expliciter le produit scalaire associé à la trace t par $(u|v) = t(uv^*)$.

2° On suppose désormais que G est le groupe des permutations des nombres 1, 2, 3. On définit des éléments p et r de G comme suit :

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 3, \quad p(3) = 2,$$
$$r(1) = 2, \quad r(2) = 3, \quad r(3) = 1.$$

Établir les relations :

$$p^2 = r^3 = \mathrm{I}, \quad prp = r^{-1}.$$

3° Déterminer toutes les applications χ de G dans $\mathbb{C}$ telles que $\chi(g) \neq 0$ pour tout g dans G et telles que $\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')$ pour tout couple (g, g') d'éléments de G.

4° Trouver deux matrices carrées d'ordre 2, P et R, vérifiant les relations $\mathrm{R} \neq \mathrm{I}_2$, $\mathrm{P}^2 = \mathrm{R}^3 = \mathrm{I}_2$, $\mathrm{PRP} = \mathrm{R}^{-1}$ où I_2 désigne la matrice unité. [On pourra chercher des matrices à coefficients réels. Une interprétation géométrique peut être utile.]

5° Construire un espace vectoriel E, de dimension 2 sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire, et une application π de G dans $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ telle que l'on ait $\pi(r) \neq \mathrm{I}_\mathrm{E}$ et qui satisfasse aux relations suivantes :

$$\pi(gg') = \pi(g)\pi(g') \tag{13}$$

$$(\pi(g)x \,|\, \pi(g)y) = (x|y) \tag{14}$$

pour g, g' dans G et x, y dans E.

Comment peut-on obtenir toutes ces applications π ?

6° Avec les notations précédentes, soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des triplets (λ, μ, u) avec λ, μ dans $\mathbb{C}$ et u dans $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$. On considère $\mathfrak{A}$ comme une algèbre avec les opérations :

$$(\lambda, \mu, u) + (\lambda', \mu', u') = (\lambda + \lambda', \mu + \mu', u + u')$$
$$\alpha(\lambda, \mu, u) = (\alpha\lambda, \alpha\mu, \alpha u)$$
$$(\lambda, \mu, u)(\lambda', \mu', u') = (\lambda\lambda', \mu\mu', uu')$$

En utilisant les résultats des questions précédentes construire une application linéaire bijective Φ de A(G) sur $\mathfrak{A}$ telle que $\Phi(uu') = \Phi(u)\Phi(u')$ pour u, u' dans A(G). Examiner en quoi Φ transforme l'involution, la trace et le produit scalaire définis sur A(G).

IV

Dans toute cette partie A désigne une algèbre unifère. On note e son élément unité. On suppose que A est un espace vectoriel de dimension finie non nulle. On suppose A munie d'une involution $a \longmapsto a^*$ et d'une trace t ; on pose $(a|b) = t(ab^*)$ pour a et b dans A.

1° Soient f_1 et f_2 deux idempotents hermitiens de A. Montrer que les relations $f_1 f_2 = 0$ et $(f_1|f_2) = 0$ sont équivalentes ; on les exprime en disant que f_1 et f_2 sont *orthogonaux*. S'il en est ainsi on a $f_2 f_1 = 0$ et $f_1 + f_2$ est un idempotent hermitien ; prouver ces faits.

2° Soit I un idéal à gauche de A, non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'il existe dans I un idempotent hermitien non nul. [Utiliser les résultats de la partie I.]

3° Soit f un idempotent hermitien non nul. Montrer que l'idéal à gauche $\mathrm{A}f$ est minimal si et seulement si f est un idempotent irréductible.

En déduire une caractérisation des idéaux à gauche minimaux.

. . . / . . .

4° Soit I un idéal à gauche de A et soit I' l'orthogonal de I, c'est-à-dire l'ensemble des éléments a de A tels que l'on ait $(a|b) = 0$ pour tout b dans I. Montrer que I' est un idéal à gauche de A.

5° Soit I un idéal à gauche de A, non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'il existe des idempotents hermitiens irréductibles $f_1, \ldots, f_p$, deux à deux orthogonaux, et tels que I soit somme directe des idéaux à gauche minimaux $Af_1, \ldots, Af_p$ (c'est-à-dire que tout élément a de A s'écrit d'une manière unique sous la forme $a = a_1 + \ldots + a_p$ où a_1 est dans $Af_1, \ldots, a_p$ dans Af_p).

Montrer que $f = f_1 + \ldots + f_p$ est un idempotent hermitien et que l'on a $I = Af$. Existe-t-il un autre idempotent hermitien f' tel que $I = Af'$?

V

On conserve les notations de la partie IV. On demande de prouver les faits suivants relatifs aux idéaux minimaux de A.

1° Soit N un idéal minimal de A. Montrer que N est stable par l'involution (en d'autres termes si a est dans N alors a^* est dans N).

2° Si N et N' sont deux idéaux minimaux de A distincts, on a $aa' = 0$ et $(a|a') = 0$ quels que soient a dans N et a' dans N'.

3° Il existe un nombre fini d'idéaux minimaux $N_1, \ldots, N_p$ de A et l'espace vectoriel A est somme directe des sous-espaces $N_1, \ldots, N_p$.

4° Posons $e = e_1 + \ldots + e_p$ avec $e_i \in N_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Montrer que $e_1, \ldots, e_p$ sont des idempotents hermitiens, deux à deux orthogonaux. De plus, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on a $N_i = Ae_i = e_iA$ et $e_ia = ae_i = a$ pour tout élément a de N_i.

5° Soit I un idéal à gauche minimal de A. Montrer que le sous-espace vectoriel N de A engendré par IA est un idéal minimal.

VI

On conserve les notations de la partie IV. On suppose que A n'est pas réduite à $\{0\}$ et qu'il n'existe dans A aucun idéal différent de $\{0\}$ et A.

1° Soit f un idempotent hermitien irréductible. Montrer que l'on a $fAf = \mathbb{C}f$. [On pourra montrer que, pour tout $x \neq 0$ dans fAf, il existe y dans fAf tel que $yx = f$.]

2° Soient f et f' deux idempotents hermitiens irréductibles. Montrer qu'il existe dans fAf' un élément h tel que $hh^* = f$ et $h^*h = f'$. En déduire que l'on a $fAf' = \mathbb{C}h$.

3° Montrer qu'il existe des idempotents irréductibles $f_1, \ldots, f_p$, deux à deux orthogonaux, tels que $e = f_1 + \ldots + f_p$.

4° Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe un élément h_i de f_1Af_i tel que $h_ih_i^* = f_1$ et $h_i^*h_i = f_i$. On pose $p_{ij} = h_i^*h_j$ pour i et j compris entre 1 et p.

Montrer que p_{ij} appartient à f_iAf_j et qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que les éléments λp_{ij} forment une base orthonormale de A.

5° Soit E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire. Montrer qu'il existe une application linéaire bijective Φ de A sur $\mathfrak{L}(E)$ telle que l'on ait $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ pour a et b dans A.

Comparer $\mathrm{Tr}(\Phi(a))$ et $t(a)$; comparer également $\Phi(a^*)$ et $\Phi(a)^*$.

VII

Interpréter les résultats de la question III 6° à la lumière des résultats précédents.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail